شنبه
۱۴۰۴/۰۱/۰۹

جامع حد و پیوستگی
(فصل ۶ یازدهم + فصل ۳ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی
ریاضی

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	کاظم اجلالی	فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنوند ـ سجاد احمدی

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله +توان‌های گویا + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن و آمار و احتمال

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دانش آموزان عزیز ماز

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشین.

ما اومدیم با یه فصل که پُر از درسهاییه که می‌تونیم حتی توی زندگیمون هم ازش استفاده کنیم. ما توی این فصل یاد می‌گیریم که اگه خدای نکرده به مشکلی برخورد کردیم بتونیم با تکیه به آموخته‌هامون اون رو رفع کنیم و بدونیم که برای رفع یه مشکل یا ابهام، سخت‌ترین راه حل، لزوماً بهترین راه نیست و همچنین می‌تونیم یاد بگیریم که حتی اگه هدفمون توی بی‌نهایت هم باشه برای رسیدن بهش باید بی‌نهایت بار تلاش کنیم و توی کارمون تداوم و پیوستگی داشته باشیم چرا که جا زدن و ناپیوستگی توی مسیرمون می‌تونه باعث شکست بشه. خب بچه‌ها، فصل حد و پیوستگی، یه فصل مهم و اساسی که شاخ و برگش حتی تا فصل مشتق و کاربرد مشتق هم نفوذ می‌کنه.

احتمالاً سوالی که ذهنتون رو مشغول کرده اینه که این فصل توی کنکور چقدر اهمیت داره! در جوابتون باید بگیم که حدوداً **۳** تا از سوال‌های کنکور رو برای این فصل رزرو کنید و برای اینکه بتونید از پس همه اونا بر بیاین، علاوه بر تسلط کامل روی این فصل باید نکته‌های مربوط به قدرمطلق، جزء صحیح، اتحادهای جبری و روابط مثلثاتی رو هم خوب بلد باشین.

راستی، به بخش‌های حد در بی‌نهایت و پیوستگی هم نگاه ویژه‌تری داشته باشید.

پیش نیازهای مطالعه این بخش چه مباحثی هستند؟

برای اینکه بتونید فصل حد و پیوستگی رو بخونید، باید روی مباحث اتحادهای جبری، تابع و مثلثات تسلط داشته باشید. یعنی فصل‌های ۲، ۳ و ۵ دهم، فصل‌های ۳، ۴ و ۵ یازدهم و همچنین فصل‌های ۱ و ۲ دوازدهم.

این بخش‌ها در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

تنها بخشی که کاربرد حد در آنجا وجود دارد (در محدوده کتاب‌های دبیرستان)، بخش مشتق و کاربرد مشتق است. پس نمی‌تونید بدون مطالعه قسمت حد و پیوستگی، روی فصل‌های مشتق و کاربرد مشتق به تسلط کاملی برسید.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۳	۳	۳	۳	۳	۳
مباحث مطرح شده در سوال	حد توابع شامل جزء صحیح حد در بی‌نهایت پیوستگی	حد توابع شامل جزء صحیح حد در بی‌نهایت رفع ابهام صفر صفرم	پیوستگی در نقطه پیوستگی در بازه حد بی‌نهایت	رفع ابهام صفر صفرم حد در بی‌نهایت پیوستگی	حد نموداری حد بی‌نهایت پیوستگی	حد نموداری حد بی‌نهایت پیوستگی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان...

حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- اگر $(۲a-۱,a+۱)$ یک همسایگی نقطهٔ ۲ باشد، کدام‌یک همسایگی چپ نقطهٔ $[a]$ است؟

۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{۳}{۲},۲)$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

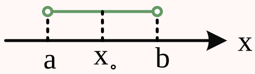
توجه کنید که ۲ باید عضو بازهٔ $(۲a-۱,a+۱)$ باشد، پس:

$$\begin{cases} ۲a-۱<۲ \Rightarrow a<\frac{۳}{۲} \\ a+۱>۲ \Rightarrow a>۱ \end{cases} \Rightarrow ۱<a<\frac{۳}{۲} \Rightarrow [a]=۱$$

پس $(\frac{۱}{۲},۱)$ یک همسایگی چپ $[a]$ است.

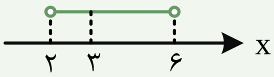
تعریف همسایگی

هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر $x_۰\in(a,b)$ باشد، آن‌گاه بازه (a,b) یک همسایگی $x_۰$ می‌باشد.



به عنوان مثال:

بازه $(۲,۶)$ یک همسایگی عدد ۳ است یعنی عدد ۳ عضوی از بازه $(۲,۶)$ است که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.



گروه آموزشی ماز

۲- تابع $f(x)=a\sin x[\cos x]+[-\cos x]$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

$$x\to\frac{\pi}{۲}^- \Rightarrow \cos x\to ۰^+ \Rightarrow [\cos x]=۰\ ,\ [-\cos x]=-۱$$

$$x\to\frac{\pi}{۲}^+ \Rightarrow \cos x\to ۰^- \Rightarrow [\cos x]=-۱,[-\cos x]=۰$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=۰-۱=-۱$$

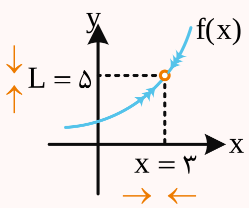
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)=-a+۰=-a$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)\Rightarrow -۱=-a\Rightarrow a=۱$$

شرط وجود حد

با توجه به شکل مقابل، اگر روی محور x و از هر دو طرف به عدد $x_۰=۳$ نزدیک شویم متوجه می‌شویم که مقدار تابع $f(x)$ روی محور y از بالا و پایین به عدد $L=۵$ نزدیک می‌شود که می‌توان نوشت:

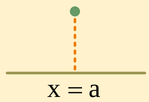
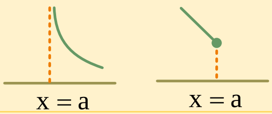
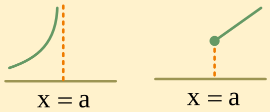
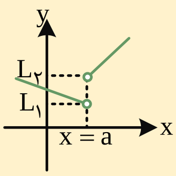
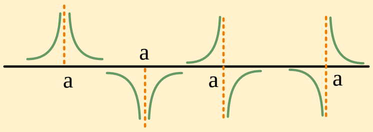


$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۵ \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۵ \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to ۳} f(x)=۵$$

به عبارت دیگر، اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه $x = x_0$ تعریف شده باشد و حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در $x = x_0$ موجود و با هم برابر باشند، آن‌گاه می‌توان گفت که تابع $f(x)$ در $x = x_0$ دارای حد است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L\end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

خلاصه سرتون رو درد نیاریم، اگر بخواهیم حد تابع f رو توی یه نقطه مثل $x = a$ بررسی کنیم، میایم و حد چپ و حد راست تابع f رو توی نقطه $x = a$ پیدا می‌کنیم، حالا اگه حد چپ و راست تابع توی اون نقطه وجود داشته باشن و با هم برابر باشن، میگیم که تابع f در نقطه $x = a$ «حد داره»، اما اگر یکی از مواردی که توی جدول پایینی هست اتفاق بیفته، اونوقت میگیم که تابع f در نقطه $x = a$ «حد نداره».

تابع f در همسایگی نقطه $x = a$ تعریف نشده باشد.	
تابع f در $x = a$ حد راست نداشته باشد و یا اینکه حد راست تابع در $x = a$ نامتناهی باشد.	
تابع f در $x = a$ حد چپ نداشته باشد و یا اینکه حد چپ تابع در $x = a$ نامتناهی باشد.	
تابع f در $x = a$ هم حد چپ و هم حد راست داشته باشد اما این دو مقدار با هم برابر نباشند.	
حاصل حد تابع f از هر دو طرف در $x = a$ نامتناهی باشد.	

قضایای حد

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ حد داشته باشند به طوری که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ باشد، آن‌گاه:

۱) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

۲) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right) = (\lim\limits_{x\to a} f(x)).(\lim\limits_{x\to a} g(x)) = L_1.L_2$

۳) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}\ ,\ L_2 \neq 0$

۴) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x) = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n = (L_1)^n$

۳- اگر توابع f و g در نقطهٔ $x=2$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{f}{g})(2x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2}(f-2g)(x)=4$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

فرض کنید $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=L_2$ ، در این صورت:

$$\lim_{x\to 2}(f-2g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)-2\lim_{x\to 2} g(x)=L_1-2L_2=4$$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{f}{g})(2x)=\lim_{t\to 2}(\frac{f}{g})(t)=\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(t)}{\lim\limits_{t\to 2} g(t)}=\frac{L_1}{L_2}=3 \Rightarrow L_1=3L_2$$

بنابراین: $3L_2-2L_2=4 \Rightarrow L_2=4 \Rightarrow L_1=12$

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=12$

گروه‌آموزشی ماز

۴- اگر $f(x)=[2x^2]+m[x]^2$ در $x=2$ دارای حد باشد، مقدار m چه عددی است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=8+m\times 4=4m+8$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=7+m\times 1=m+7$$

شرط آن‌که f در $x=2$ حد داشته باشد آن است که حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر باشند، پس:

$$4m+8=m+7 \Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

گروه‌آموزشی ماز

۵- مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

توجه کنید که:

$$x^3-3x+2=x^3-1-3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)$$

$$=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

میانبر (هوپیتال)

چون مخرج عامل $(x-1)^2$ دارد، برای رفع ابهام باید دو بار هوپیتال بگیریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{2(x-1)}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3$$

حذف عامل ابهام به کمک اتحادها، فاکتورگیری، تجزیه و قاعده تقسیم

در یک تابع کسری به فرم $y=\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای بوده و $f(a)=g(a)=0$ باشد می‌توان نتیجه گرفت که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند، بنابراین می‌توانیم به کمک عواملی نظیر اتحادها (جبری و مثلثاتی)، فاکتورگیری، تجزیه و استفاده از قاعده تقسیم چندجمله‌ای‌ها، عامل ابهام را در صورت و مخرج کسر ظاهر شده و آن‌ها را با هم ساده کنیم و در نهایت حد تابع به دست آمده را به ازای $x=a$ محاسبه کنیم.

اتحادهای جبری	
• $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	• $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
• $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	• $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
• $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	• $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

رفع ابهام به کمک دستور هوپیتال (HOP)

بیایید ببینیم اصلاً داستان این هوپیتال چیه!

اگر بعد از جایگذاری نقطه $x=a$ در $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم می‌توانیم از دستور هوپیتال برای رفع این ابهام استفاده کنیم به این صورت که اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند به جای محاسبه حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم مقدار حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را به دست بیاوریم یعنی از صورت و مخرج کسر داده شده به صورت جداگانه مشتق گرفته و عبارت جدیدی بسازیم و سپس از عبارت جدید در $x=a$ حد می‌گیریم، به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to a}\frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{مشتق } f}}{\underbrace{g'(x)}_{\text{مشتق } g}}$$

توجه:

اگر بعد از استفاده از دستور هوپیتال مجدداً به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رسیدیم، می‌توانیم مجدداً از دستور هوپیتال استفاده کنیم.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4}=b$، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) -4 ۴) -5

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

حد مخرج کسر داده شده در $x=2$ برابر صفر است، پس حد صورت آن هم در این نقطه باید صفر باشد، در غیر این صورت حاصل حد کسر نامتناهی خواهد بود، پس:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0\Rightarrow 4+2a+b=0\Rightarrow b=-2a-4$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-4}+\frac{a(x-2)}{x^2-4}\right)=1+\lim_{x\to 2}\frac{a}{x+2}=1+\frac{a}{4}$$

بنابراین:

$$1+\frac{a}{4}=b\Rightarrow 1+\frac{a}{4}=-2a-4\Rightarrow\frac{9}{4}a=-5\Rightarrow a=-\frac{20}{9}\Rightarrow b=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{a}{b}=-5$$

میانبر (هوپیتال)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2x+a}{2x}=\frac{4+a}{4}=b$$

از طرفی، چون حد صورت کسر نیز باید به ازای $x=2$ صفر شود، داریم:

$$4+2a+b=0\Rightarrow b=-4-2a$$

$$\Rightarrow\frac{4+a}{4}=-4-2a\Rightarrow 4+a=-16-8a\Rightarrow 9a=-20\Rightarrow a=\frac{-20}{9}, b=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{a}{b}=-5$$

مگه میشه مخرج صفر باشه ولی حاصل حد حقیقی بشه! حتماً صورت صفر بوده!!

- در حد توابع کسری به فرم $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر حد صورت کسر به ازای $x=a$ برابر صفر بوده ولی حاصل حد برابر عدد حقیقی $b\neq 0$ باشد، آن‌گاه حد مخرج کسر نیز باید به ازای $x=a$ برابر صفر باشد.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b\neq 0,\ \lim_{x\to a}f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}g(x)=0$$

- در حد توابع کسری به فرم $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر حد مخرج کسر به ازای $x=a$ برابر صفر بوده ولی حاصل حد برابر عدد حقیقی b باشد، آن‌گاه حد صورت کسر نیز باید به ازای $x=a$ برابر صفر باشد.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to a}g(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=0$$

گروه آموزشی ماز

۷- مقدار $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-8x-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $-\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{10}$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-8x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{x^2-9x}{x^2-8x-9}\times\frac{1}{x+3\sqrt{x}}=\lim_{x\to 9}\frac{x(x-9)}{(x+1)(x-9)}\times\frac{1}{x+3\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{x}{x+1}\times\frac{1}{x+3\sqrt{x}}=\frac{9}{10}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{20}$$

میانبر (هوپیتال)

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-8x-9}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 9}\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{x}}}{2x-8}=\frac{1-\frac{1}{2}}{10}=\frac{1}{20}$$

حذف عامل ابهام به کمک گویا کردن کسرهای شامل عبارت رادیکالی

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از حد توابع کسری به فرم $\lim\limits_{x\to x}\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر تابع $f(x)$ و یا $g(x)$ (و یا گاهی وقتا هر دو)، شامل عبارت رادیکالی باشند، در این صورت با توجه به فرجه رادیکال و با استفاده از اتحادهای مزدوج و یا چاق و لاغر، صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسبی ضرب می‌کنیم، سپس به کمک همین اتحادها، عامل صفرکننده را در صورت و مخرج کسر ظاهر کرده و آن‌ها را با هم ساده می‌کنیم و در نهایت حاصل حد را در $x=a$ به دست می‌آوریم.

یادآوری:

- $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$
- $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$

گروه آموزشی ماز

۸- مقدار $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+4}-x}{x-2\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+4}-x}{x-2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt[3]{x+4}-2}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 4}\cancel{\frac{x+4-8}{x-4}}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+2\sqrt[3]{x+4}+4}-1=\frac{2+2}{4+4+4}-1=-\frac{2}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $a \neq ۰$ و $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x-a}-\sqrt[۳]{۲x-b}}{x-۱} = -\frac{۱}{۳}$، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

توجه کنید که حد مخرج کسر داده شده در $x=۱$ برابر صفر است و حد کسر در این نقطه نامتناهی نیست، بنابراین حد صورت کسر هم باید در این نقطه برابر صفر باشد، پس:

$$\lim_{x \to ۱}(\sqrt[۳]{x-a}-\sqrt[۳]{۲x-b}) = ۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{۱-a} = \sqrt[۳]{۲-b} \Rightarrow ۱-a = ۲-b \Rightarrow b = ۱+a$$

پس حد مورد نظر به صورت زیر است:

$$\lim_{x \to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-a}-\sqrt[۳]{۲x-a-۱}}{x-۱} = \lim_{x \to ۱}\frac{x-a-(۲x-a-۱)}{x-۱} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-a)^۲}+\sqrt[۳]{(x-a)(۲x-a-۱)}+\sqrt[۳]{(۲x-a-۱)^۲}} = \frac{-۱}{۱} \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱-a)^۲}} = -\frac{۱}{۳}$$

بنابراین:

$$\sqrt[۳]{(۱-a)^۲} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱-a = ۱ \Rightarrow a = ۰ \ \text{غ ق ق} \\ ۱-a = -۱ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

در نتیجه: $ab = ۶$

میانبر (هوپیتال)

$$\lim_{x \to ۱}\frac{\frac{۱}{۳}(x-a)^{-\frac{۲}{۳}} - ۲(\frac{۱}{۳})(۲x-۱-a)^{-\frac{۲}{۳}}}{۱} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۱-a)^۲}} - \frac{۲}{\sqrt[۳]{(۱-a)^۲}}\right) = -\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{(۱-a)^{\frac{۲}{۳}}} = -۱ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ a = ۲ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۱۶^x - ۴^x - ۲}{۱۶^x - ۳ \times ۴^x + ۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

اگر فرض کنیم $t = ۴^x$، آن‌گاه حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}}\frac{(۴^x)^۲ - ۴^x - ۲}{(۴^x)^۲ - ۳ \times ۴^x + ۲} = \lim_{t \to ۲}\frac{t^۲ - t - ۲}{t^۲ - ۳t + ۲} = \lim_{t \to ۲}\frac{(t+۱)(t-۲)}{(t-۱)(t-۲)} = \lim_{t \to ۲}\frac{t+۱}{t-۱} = ۳$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{۲\sin^۲ x + \sin x - ۱}{۴\cos^۲ x - ۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

توجه کنید که حد مورد نظر به صورت زیر است:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}}\frac{۲\sin^۲ x + \sin x - ۱}{۴(۱-\sin^۲ x) - ۳} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}}\frac{۲\sin^۲ x + \sin x - ۱}{۱ - ۴\sin^۲ x}$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، آن‌گاه $t\to \frac{۱}{۲}$ و حد مورد نظر به صورت زیر در می‌آید:

$$\lim_{t\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲t^۲+t-۱}{۱-۴t^۲}=\lim_{t\to\frac{۱}{۲}}\frac{\cancel{(۲t-۱)}(t+۱)}{\cancel{(۱-۲t)}(۱+۲t)}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{-(t+۱)}{۲t+۱}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

میانبر (هوپیتال)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۲\sin^۲x+\sin x-۱}{۴\cos^۲x-۳}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۴\sin x\cos x+\cos x}{-۸\cos x\sin x}=\frac{۴(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-۸(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{\frac{۳\cancel{\sqrt{۳}}}{۲}}{-۲\cancel{\sqrt{۳}}}=-\frac{۳}{۴}$$

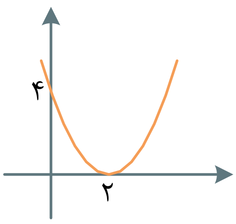
اتحادهای مثلثاتی

اگر هوپیتال یا مشتق توابع مثلثاتی رو بلد نیستین، حتماً اتحادهای مثلثاتی رو خوب مسلط بشید! البته حتی اگر مشتق هم بلدین خوندن این جدول از واجباته!

اتحادهای مثلثاتی	
• $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$	• $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$
• $\cos ۲x=\cos^۲x-\sin^۲x$	• $۱-\cos x=۲\sin^۲\frac{x}{۲}$
• $\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱=۱-۲\sin^۲x$	• $۱+\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}$
• $\sin^۲x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}$	• $۱+\sin x=(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^۲$
• $\tan x-\cot x=-۲\cot ۲x$	• $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$
• $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$	• $۱+\cot^۲x=\frac{۱}{\sin^۲x}$

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر نمودار سهمی $y=f(x)$ شکل مقابل باشد، مقدار $\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(x+۲)}{x^۲-۱}$ کدام است؟



۱) ۱

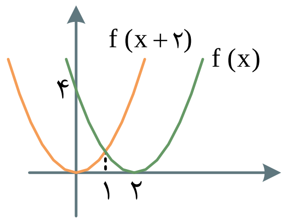
۲) ۲

۳) -۱

۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

با توجه به نمودار داده شده $f(x)=(x-۲)^۲$ پس:



$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(x+۲)}{x^۲-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۲)^۲-x^۲}{x^۲-۱}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{x^۲-۴x+۴-x^۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{-۴(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=-۲$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- فرض کنید $f(x)=\dfrac{mx+[x]}{x^2[x]+2x+4[-x]}$، اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$، مجموعهٔ مقادیر ممکن m کدام است؟

۱) $(0,\frac{1}{2})$ ۲) $(-\frac{1}{2},0)$ ۳) $(-1,-\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

توجه کنید که:
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{mx+2}{2x^2+2x-12}=\lim_{x\to 2^+}\frac{mx+2}{2(x-2)(x+3)}=\frac{2m+2}{0^+}=+\infty$$

بنابراین:
$$2m+2>0 \Rightarrow m>-1$$

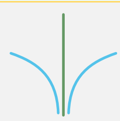
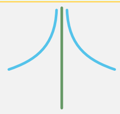
از طرف دیگر:
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{mx+1}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2^-}\frac{mx+1}{(x-2)(x+4)}=\frac{2m+1}{0^-}=+\infty$$

بنابراین:
$$2m+1<0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$$

در نتیجه مجموعهٔ مقادیر ممکن m بازهٔ $(-1,-\frac{1}{2})$ است.

نکته طلایی

اگر حاصل حد یک تابع کسری در $x=m$ از هر دو طرف برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، در این صورت $x=m$ ریشه مرتبه زوج مخرج کسر است

 $x=m$	 $x=m$
$\lim\limits_{x\to m}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to m}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

حالت خاص: در این حالت، اگر عبارت موجود در مخرج کسر، یک عبارت درجه دوم به فرم ax^2+bx+c باشد، در این صورت:

- فرم کلی عبارت درجه دوم موجود در مخرج کسر به صورت $ax^2+bx+c=a(x-m)^2$ است.
- دلتای عبارت مخرج کسر برابر صفر است.
- $x=m$، ریشه مضاعف مخرج کسر است، پس:

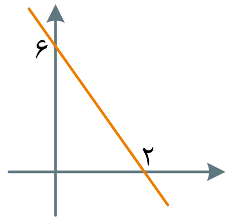
$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها}: -\dfrac{b}{a}=2m \\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}: \dfrac{c}{a}=m^2 \end{cases}$$

چرا براکت‌ها رو می‌ریزین تو حدها!

در حد توابع کسری، اگر تابع موردنظر شامل جزء صحیح و یا قدرمطلق باشد، قبل از هر چیز باید تکلیف آن‌ها را مشخص کنیم به این صورت که جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و سپس به محاسبهٔ حد موردنظر می‌پردازیم.

گروه آموزشی ماز

۱۴- نمودار تابع خطی $y=۳x+f(۳x)$ شکل روبه‌رو است. مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۴x+f^{-۱}(x)}{۲x-۲f(x)}$ کدام است؟



۱) ۲

۲) $\dfrac{۳}{۷}$

۳) $\dfrac{۳}{۴}$

۴) $\dfrac{۷}{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

$$y(x)=-۳x+۶ \Rightarrow ۳x+f(۳x)=-۳x+۶$$

$$f(۳x)=-۶x+۶ \Rightarrow f(x)=-۲x+۶$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{-x+۶}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+f^{-۱}(x)}{۲x-۲f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+\frac{۶-x}{۲}}{۲x-۲(-۲x+۶)}=\lim_{x\to\infty}\frac{۳+\frac{۷}{۲}x}{۶x-۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(۲x-۱)^۳-۸(x+۱)^۳}{۲(x-۱)^۲+(۲x+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\dfrac{۴}{۳}$ ۳) -۵ ۴) -۶

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

توجه کنید که:

$$(۲x-۱)^۳-۸(x+۱)^۳=\cancel{۸x^۳}-۱۲x^۲+۶x-۱-\cancel{۸x^۳}-۲۴x^۲-۲۴x-۸=-۳۶x^۲-۱۸x-۹$$

$$۲(x-۱)^۲+(۲x+۱)^۲=۲x^۲-۴x+۲+۴x^۲+۴x+۱=۶x^۲+۳$$

بنابراین حد مورد نظر به صورت مقابل است:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳۶x^۲-۱۸x-۹}{۶x^۲+۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳۶x^۲}{۶x^۲}=-۶$$

تیز باش!

از همان ابتدا مشخص است که ضریب $x^۳$ صورت صفر خواهد شد، بنابراین کافی است تنها ضریب $x^۲$ را حساب کنیم.

رفع ابهام بی‌نهایت بی‌نهایتم

در حدهای به فرم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، اگر حاصل حد صورت و مخرج کسر برابر بی‌نهایت باشد، به حالت مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ برخورد می‌کنیم که باید از آن رفع ابهام کنیم، یکی از روش‌هایی که برای رفع ابهام $\dfrac{\infty}{\infty}$ کاربرد دارد، استفاده از هم‌ارزی پرتوان در صورت و مخرج کسر است که در این حالت با توجه به درجهٔ عبارت صورت و مخرج کسر، با سه حالت مواجه می‌شویم، به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۱}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\dots}\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}$$

شرط		جواب حد	نمونه
اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر، بیشتر باشد.	$n>m$	$(+\infty)$ یا $(-\infty)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^۳+۱}{x^۲}\sim\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^۳}{x^۲}=+\infty$
اگر درجه صورت کسر با درجه مخرج کسر، برابر باشد.	$n=m$	$\dfrac{a}{a'}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-۳x^۲}{۲x^۲-۱}\sim\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۳x^۲}{۲x^۲}=-\dfrac{۳}{۲}$
اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر، کمتر باشد.	$n<m$	صفر	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^۲-۱}{۲x^۳-۳x}\sim\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^۲}{۲x^۳}=۰$

۱۶- فرض کنید $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x+3}$، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

توجه کنید که: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-1}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{2x}=2$

از طرف دیگر: $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x+3}=\dfrac{4x+6-7}{2x+3}=\dfrac{4x+6}{2x+3}-\dfrac{7}{2x+3}=2-\dfrac{7}{2x+3}$

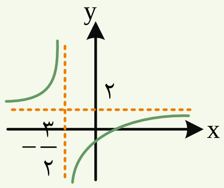
پس اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\dfrac{7}{2x-3}\to 0^-$، بنابراین: $f(x)\to 2^-\Rightarrow[f(x)]=1$

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=1$

تیز باش!

با توجه به این که مشتق تابع هموگرافیک به فرم $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ می‌شود $f'(x)=\dfrac{(ad-bc)}{(cx+d)^2}$ و با توجه به این که در اینجا $4(3)-(-1)(2)>0$، پس تابع صعودی بوده و نمودار تابع به شکل زیر است، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=1$$



گروه آموزشی ماز

۱۷- فرض کنید $f(x)=\dfrac{ax^2+x|x-2|}{2x^2-|x^2-1|}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

توجه کنید که: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax^2+x(-x+2)}{2x^2-(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a-1)x^2}{x^2}=a-1$

بنابراین: $a-1=3\Rightarrow a=4$

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+x(x-2)}{2x^2-(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+1)x^2}{x^2}=a+1=5$

گروه آموزشی ماز

۱۸- تابع $f(x)=\begin{cases}2\sin x & x>\frac{\pi}{6}\\ 2 & x=\frac{\pi}{6}\\ 2\cos 2x & x<\frac{\pi}{6}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{6}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱) پیوسته است.
۲) فقط پیوستگی چپ دارد.
۳) فقط پیوستگی راست دارد.
۴) نه پیوستگی راست دارد و نه چپ.

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

توجه کنید که: $f(\frac{\pi}{۶}) = ۲$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}^+} ۲\sin x = ۲\sin\frac{\pi}{۶} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱ \neq f(\frac{\pi}{۶})$$

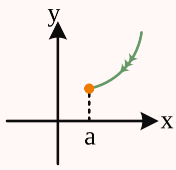
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}^-} ۲\cos ۲x = ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱ \neq f(\frac{\pi}{۶})$$

بنابراین تابع f در $x = \frac{\pi}{۶}$ نه پیوستگی راست دارد و نه چپ.

پیوستگی یک طرفه

الف) پیوستگی راست

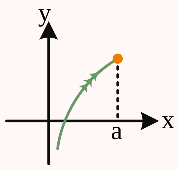
تابع f در $x = a$ از راست پیوسته است، هرگاه حد راست تابع در نقطه $x = a$ با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد.



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ب) پیوستگی چپ

تابع f در $x = a$ از چپ پیوسته است، هرگاه حد چپ تابع در نقطه $x = a$ با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد.



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

بنابراین اگر تابع f در همسایگی $x = a$ هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد، در این صورت تابع f در $x = a$ پیوسته است.

گروه آموزشی ماز

۱۹- تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ + ۴ & x < ۲ \\ b\left[\frac{۴}{x}\right] + a[-x] & x \geq ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶− ۳) ۹ ۴) ۹−

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

توجه کنید که:

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} (۲x^۲ + ۴) = ۱۲$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} (b\left[\frac{۴}{x}\right] + a[-x]) = b - ۳a$$

$$f(۲) = b\left[\frac{۴}{۲}\right] + a[-۲] = ۲b - ۲a$$

بنابراین:

$$۲b - ۲a = b - ۳a \Rightarrow b = -a$$

$$b - ۳a = ۱۲ \Rightarrow -a - ۳a = ۱۲ \Rightarrow a = -۳ \Rightarrow b = ۳$$

در نتیجه: $ab = -۹$.

پیوستگی در نقطه

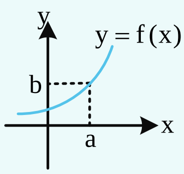
تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد:

۱) تابع f در نقطه $x = a$ حد داشته باشد:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

۲) مقدار تابع f در نقطه $x = a$ موجود و برابر حد تابع باشد.

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = b \quad (a \in \mathbb{R})$$



به بیان دیگر برای این که تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد، باید:

$$\begin{cases} \text{(مقدار تابع در } x=a) = (\text{حد چپ در } x=a) = (\text{حد راست در } x=a) : \text{به زبان فارسی} \\ \text{به زبان ریاضی} : \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲+ax+۴}}{x^۲+۳x-a}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۶)

توجه کنید که دامنهٔ تابع f باید $\mathbb{R}$ باشد تا روی $\mathbb{R}$ پیوسته شود، پس عبارت زیر رادیکال باید روی $\mathbb{R}$ نامنفی باشد و عبارت مخرج f(x) نباید هیچ‌گاه صفر شود، بنابراین:

$$x^۲+ax+۴ \ge ۰ \Rightarrow \Delta \le ۰ \Rightarrow a^۲-۱۶ \le ۰ \Rightarrow -۴ \le a \le ۴$$

$$x^۲+۳x-a \ne ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow ۹+۴a < ۰ \Rightarrow a < -\frac{۹}{۴}$$

بنابراین $-۴ \le a < -\frac{۹}{۴}$ و a می‌تواند اعداد ۴- یا ۳- باشد.

گروه آموزشی ماز